SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Bruno Franchi

RETTIFICABILITÀ NEL GRUPPO DI HEISENBERG

3 giugno 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto. In questo seminario presentiamo un teorema di struttura per alcuni insiemi di perimetro finito nel gruppo di Heisenberg che è analogo al teorema classico di De Giorgi per insiemi di Caccioppoli nello spazio Euclideo.

Abstract. In this seminar we state a structure theorem for some finite perimeter subsets in the Heisenberg group that is analogous to the classical De Giorgi's theorem for Caccioppoli sets in the Euclidean space.

In questo seminario intendo presentare alcuni risultati ottenuti recentemente in collaborazione con R. Serapioni e F. Serra Cassano. Denotiamo con $\mathbb{H}^n$ il gruppo di Heisenberg $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$, dove i punti sono indicati con $P = [z,t] = [x + iy, t] \simeq (p_1, \ldots, p_{2n+1})$ e la legge di moltiplicazione è definita nel modo seguente: se $Q = [\zeta, \tau]$ è un altro punto di $\mathbb{H}^n$, allora $P \cdot Q = [z + \zeta, t + \tau + 2\Im m(z \cdot \bar{\zeta})]$, e, se $\lambda \in \mathbb{R}$, possiamo definire una di dilatazioni non-isotrope ponendo $\lambda \circ [z,t] = [\lambda z, \lambda^2 t]$. Inoltre poniamo $\|P\|_\infty := \max\{|z|, |t|^{1/2}\}$ e $d(P,Q) := \|P^{-1} \cdot Q\|_\infty$; sottolineiamo esplicitamente che d è una distanza su $\mathbb{H}^n$, equivalente alla distanza di Carnot-Carathéodory. Nel seguito $U(P,r)$ denoterà la sfera aperta di centro P e raggio r rispetto alla distanza d. Infine indichiamo con X_i e Y_i, $i = 1, \ldots, n$ i campi invarianti a sinistra sul gruppo definiti da $X_i = \partial_{x_i} + 2y_i\partial_t$ e $Y_i = \partial_{y_i} - 2x_i\partial_t$; identificheremo sistematicamente i campi vettoriali e gli operatori differenziali del primo ordine associati. I campi vettoriali $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ definiscono canonicamente un fibrato (fibrato orizzontale $H\mathbb{H}^n$) su $\mathbb{H}^n$ la cui fibra in ogni punto P è lo spazio lineare $L_0(P)$ di dimensione $2n$ generato dai campi vettoriali nel punto P. Lo spazio $L_0(P)$ sarà dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ e di una norma $|\cdot|_P$ tali che la base $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ sia ortonormale. identificheremo dunque ogni sezione regolare ϕ di $H\mathbb{H}^n$ con le sue coordinate relative a questa base; così ϕ sarà identificata a una funzione $(\phi_1 \ldots \phi_{2n}) : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n}$.

Per finire, per quanto non è definito esplicitamente in questa nota, come pure per l'interesse dello studio del gruppo di Heisenberg, rimandiamo [S]; qui ci limitiamo ad osservare che il nostro interesse verso il gruppo di Heisenberg è essenzialmente di origine geometrica, poichè $\mathbb{H}^n$ è il più semplice esempio d'una struttura metrica sufficientemente ricca che non è euclidea neppure a livello locale (per questi aspetti di geometria intrinseca rimandiamo ad esempio a [G], [B] e [DS]). Sottolineiamo qui esplicitamente che la dimensione di Hausdorff intrinseca (dimensione omogenea) di $\mathbb{H}^n$ come spazio metrico è $Q = 2n + 2$.

In $\mathbb{H}^n$ c'è una definizione naturale di spazio $BV_{\mathbb{H}}$ e dunque di perimetro, definizioni che vogliamo richiamare (in effetti, ci sono parecchie definizioni possibili che si può dimostrare essere equivalenti: si vedano, ad esempio, [BM], [GN] e [FSSC]).

Definizione 1. *Diremo che un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{H}^n$ ha $\mathbb{H}$-perimetro finito in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ se*

$$|\partial E|_{\mathbb{H}}(\Omega) := \sup\{\int_E div_{\mathbb{H}}\phi dP := \int_E \sum_j^n (X_j\phi_j + Y_j\phi_{j+n})\, dP, |\phi(P)|_P \leq 1\} < \infty,$$

dove $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ è una sezione regolare del fibrato orizzontale supportata in Ω.

Tradizionalmente, un insieme E di perimetro localmente finito (cioè $|\partial E|_{\mathbb{H}}(\Omega) < \infty$ per ogni aperto limitato Ω) è detto *insieme di Caccioppoli* ([EG]).

Se E è un insieme di Caccioppoli in $\mathbb{H}^n$, allora $|\partial E|_{\mathbb{H}}$ definisce una misura di Radon positiva. come nel caso euclideo (per il quale rimandiamo a [EG]), esiste una normale esteriore nel senso della teoria della misura ν_E a ∂E, che è una sezione del fibrato orizzontale. Più precisamente (si veda, ad esempio, [FSSC], p. 880), si ha:

Teorema–Definizione 2. *Esiste una sezione $|\partial E|_{\mathbb{H}}$-misurabile $\nu_E = (\nu_1, \dots, \nu_{2n})$ di $H\mathbb{H}^n$ tale che, per ogni sezione regolare del fibrato orizzontale $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{2n})$, si ha:*

$$\int_E div_{\mathbb{H}} \phi dP = \int_{\mathbb{H}^n} \langle \nu_E, \phi \rangle_P d|\partial E|_{\mathbb{H}}$$

Un celebre teorema dovuto a E. De Giorgi ([DG], [EG]) ci dà un risultato di struttura per la frontiera degli insiemi di Caccioppoli nello spazio euclideo: se si toglie da ∂E un sottoinsieme 'trascurabile' per la misura perimetro, ciò che resta (la *frontiera ridotta*) è numerabilmente rettificabile, cioè può essere espressa come unione numerabile di sottoinsiemi compatti di varietà C^1, e la misura perimetro coincide con la misura di Hausdorff sulla frontiera ridotta. In questo seminario proviamo un risultato analogo per certi sottoinsiemi nel gruppo di Heisenberg.

Definizione 3. *Diciamo che $P \in \partial^*_{\mathbb{H}} E$ (frontiera ridotta di E) se*

i) $|\partial E|_{\mathbb{H}}(U(P,r)) > 0$ *per ogni* $r > 0$;

ii) $\nu_E(P) = \lim_{r \to 0} \fint_{U(P,r)} \nu_E d|\partial E|_{\mathbb{H}}$, *dove* $\fint_{U(P,r)} \nu_E d|\partial E|_{\mathbb{H}}$ *è la media delle coordinate di* ν_E *su* $U(P,r)$ *rispetto alla misura* $|\partial E|_{\mathbb{H}}$, *e la formula deve essere interpretata nel senso che le medie delle coordinate convergono alle corrispondenti coordinate del limite;*

iii) $|\nu_E|_P = 1$.

Ora, per formulare il nostro teorema di struttura in $\mathbb{H}^n$, dobbiamo preliminarmente dare un senso intrinseco alla nozione di ipersuperficie 'regolare' in $\mathbb{H}^n$. A tal fine, richiamiamo i risultati seguenti ([P]) per una funzione reale f definita in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$:

Teorema 4. *Diciamo che $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\Omega)$ se f, $X_i f$, $Y_i f$ sono continue in Ω per $i = 1, \dots, n$. Se allora $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\Omega)$ si ha*

$$f(Q) = f(P) + \sum_{j=1}^n X_j f(P)(P^{-1} \cdot Q)_j + \sum_{j=1}^n Y_j f(P)(P^{-1} \cdot Q)_{j+n} + o(d(P,Q))$$

per $Q \to P$, uniformemente sulle parti compatte di Ω (per una discussione approfondita sulla differenziabilità in $\mathbb{H}^n$, rimandiamo a [P]).

Possiamo ora dare la definizione seguente.

Definizione 5. *Se $S \subset \mathbb{H}^n$, diciamo che S è una ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ se per ogni $P \in S$ esistono $r > 0$ e una funzione $f \in C^1_{\mathbb{H}}(U(P,r))$ tali che*

i) $S \cap U(P,r) = \{Q \in U(P,r); f(Q) = 0\}$;

ii) $(X_1 f(P), \dots, X_n f(P), Y_1 f(P), \dots, Y_n f(P)) \neq 0$.

La condizione ii) ci garantisce che il 'piano tangente' $T_{\mathbb{H}} S(P)$ a S nel punto P definito da $T_{\mathbb{H}} S(P) = \{Q; \sum_{j=1}^n X_j f(P) Q_j + \sum_{j=1}^n Y_j f(P) Q_{j+n} = 0\}$ è un laterale di un sottogruppo proprio di $\mathbb{H}^n$. Inoltre, questa definizione è giustificata dalla validità d'un 'teorema di Dini' intrinseco. Per semplificare le notazioni, limitiamoci a formularlo nel caso $n = 1$.

Teorema 6. *Se $0 \in S = \{f(P) = 0\}$ è una ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ e $X_1 f(0) > 0$, allora esiste $\psi : I_\delta := [-\delta, \delta] \times [-\delta^2, \delta^2] \to \mathbb{H}^1$, ψ continua, e un intorno $\mathcal{U}$ di 0 in $\mathbb{H}^1$ tali che*

i) $S \cap \bar{\mathcal{U}} = \{x = \psi(\eta, \tau), y = \eta, t = 2\psi(\eta, \tau)\eta + \tau, (\eta, \tau) \in I_\delta\}$;

ii)

$$|\partial\{f > 0\}|_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) = \int_{I_\delta} \frac{\sqrt{(X_1 f)^2 + (Y_1 f)^2}}{(X_1 f)}(\psi, \eta, 2\psi\eta + \tau)\, d\eta d\tau;$$

iii) $\nu_{\{f>0\}} = (X_1 f, Y_1 f)/\sqrt{(X_1 f)^2 + (Y_1 f)^2}$ *sur* $S \cap \mathcal{U}$;

iv) $S = \partial^*_{\mathbb{H}}\{f > 0\}$ *(la frontiera topologica coincide con la frontiera ridotta).*

Possiamo ora enunciare il nostro teorema di struttura.

Teorema 7. *Se $E \subseteq \mathbb{H}^n$ è un sottoinsieme di Caccioppoli e se*

$$(*) \qquad \liminf_{r \to 0} \left| \fint_{U(P,r)} \nu_E d|\partial E|_{\mathbb{H}} \right| > 0,$$

per $|\partial E|_{\mathbb{H}}$-quasi ogni $P \in \mathbb{H}^n$, allora $\partial^*_{\mathbb{H}} E$ è $\mathbb{H}$-rettificabile, cioè:

i) $\partial^*_{\mathbb{H}} E = N \cup \bigcup_{h=1}^{\infty} K_h$, *dove* $\mathcal{S}_d^{Q-1}(N) = 0$, K_h *è un sottoinsieme compatto di una ipersuperficie* $S_h \in C^1_{\mathbb{H}}$;

ii) *se* $P \in K_h$, *allora* $\nu_E(P)$ *è normale a* S_h *nel punto* P, *cioè* $\nu_E(P) \in L_0(P)$ *e* $\langle \nu_E(P), Q \rangle_P = 0$ *per ogni* $Q \in T_{\mathbb{H}} S_h(P)$;

iii) $|\partial E|_{\mathbb{H}} = \frac{2\omega_{2n-1}}{\omega_{2n+1}} \mathcal{S}_d^{Q-1} \llcorner \partial^*_{\mathbb{H}} E$,

dove $\mathcal{S}_d^{Q-1}$ è la misura di Hausdorff sferica intrinseca costruita a partire dalle sfere della metrica d ([F]) e ω_m è la misura di Lebesgue della sfera unitaria nello spazio euclideo m-dimensionale.

Osservazione. Non sappiamo se la condizione (*) è soddisfatta in generale, poichè – se vogliamo seguire il procedimento classico di Federer – questo discenderebbe da un teorema di differenziabilità della misura perimetro. Purtroppo, un simile risultato è legato (o, almeno, lo è nel caso euclideo) a proprietà molto fini della geometria, e in particolare al teorema di ricoprimento di Besicovitch–Federer, che è falso in $(\mathbb{H}^n, d)$, come provato in [SW] e [KR]. Touttavia, si può verificare, ad esempio, che ogni insieme regolare in senso classico soddisfa (*).

Per finire, osserviamo che esistono insiemi $\mathbb{H}$-rettificabili che non hanno perimetro finito in senso euclideo.

Inoltre, si può dimostrare, come conseguenza del punto iii), il seguente teorema della divergenza.

Teorema 8. *Se $E \subseteq \mathbb{H}^n$ è un insieme di Caccioppoli che verifica (*), allora per ogli sezione a supporto compatto ϕ di $H\mathbb{H}^n$ di classe $C^1_{\mathbb{H}}$ si ha*

$$\int_E div_{\mathbb{H}} \phi \, dP = \frac{2\omega_{2n-1}}{\omega_{2n+1}} \int_{\partial^*_{\mathbb{H}} E} \langle \nu_E, \phi \rangle_P \, d\mathcal{S}_d^{Q-1}.$$

Osserviamo esplicitamente che una nozione di insieme rettificabile in uno spazio metrico qualunque è stata recentemente studiata in [AK1] e [AK2], utilizzando essenzialmente delle proiezioni di questi spazi metrici sullo spazio euclideo, nel senso che, secondo questa nozione, una varietà regolare è l'immagine dello spazio euclideoe tramite una funzione lipschitziana. Di fatto, questa nozione che risale a Federer ([F], 3.2.14), non sembra affatto naturale nel nostro contesto, poichè – come gli autori provano in [AK1] – il gruppo di Heisenberg non è rettificabile in questo senso. Dunque una nozione più intrinseca di rettificabilità, come quella proposta in questo seminario, sembra necessaria.

Bibliografia

[AK1] L. Ambrosio e B. Kirchheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces* (1998), preprint.

[AK2] L. Ambrosio e B. Kirchheim, *Currents in metric spaces* (1999), preprint.

[B] A. Bellaïche, *The tangent space in sub–Riemannian geometry*, Sub-Riemannian geometry (A. Bellaïche e J.-J. Risler, eds.), Birkhäuser, Basel, 1996.

[BM] M. Biroli e U. Mosco, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Dirichlet forms on homogeneous spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl. **6 (1)** (1995), 37-44.

[DG] E. De Giorgi, *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionale in uno spazio a r dimensioni*, Ricerche Mat. **4** (1955), 95–113.

[DS] G. David e S. Semmes, *Fractured fractals and broken dreams. Self-similar geometry through metric and measure*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. 7, Clarendon Press. ix, 212, Oxford, 1997.

[EG] L.C. Evans e R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[F] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.

[FSSC] B. Franchi, R. Serapioni e F. Serra Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, Houston Math. J. **22** (1996), 859-889.

[G] M. Gromov, *Carnot–Carathéodory spaces seen from within*, Sub-Riemannian geometry (A. Bellaïche e J.-J. Risler, eds.), Birkhäuser, Basel, 1996.

[GN] N. Garofalo and D-M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces.*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 1081–1114.

[KR] A. Korànyi e H.M. Reimann, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Adv. in Math. **111** (1995), 1–87.

[P] P. Pansu, *Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. **129** (1989), 1–60.

[SW] Sawyer e R.L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **114** (1989), 813–874.

[S] E. M. Stein, *Harmonic Analysis, Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.